Corrigé Examen National Maths Sciences Maths A et B 2024 Rattrapage

2ème année Baccalauréat - Sciences Maths

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

Exercice 1 : (6.5 points)

1)

a) **Montrer que f_n est continue à droite en 0**

Corrigé :

On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

(Limite usuelle des fonctions puissances-logarithmes)

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - x^n \ln x) = 0 - 0 = 0 = f_n(0)$$

$\boxed{\text{Donc } f_n \text{ est continue à droite en } 0.}$

b) **Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement**

Corrigé :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x - x^n \ln x \\ &= x^n \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \ln x \right) \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \ln x \right) = -\infty$$

Et comme :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{puisque } n \geq 2$$

On conclut :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty}$$

Et on a :

$$\frac{f_n(x)}{x} = 1 - x^{n-1}\ln x$$

$$x^{n-1}\ln x = e^{(n-1)\ln x}\ln x$$

$$\text{Posons } t = \ln x \quad (t \to +\infty \text{ quand } x \to +\infty)$$

$$= e^{(n-1)t}t$$

Or :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(n-1)t}t = +\infty \quad \text{car } n-1>0$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = 1-(+\infty) = -\infty}$$

Interprétation graphique : La courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction verticale (l'axe des ordonnées) au voisinage de $x \to +\infty$.

c) **Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que $f_n'(0^+) = 1$**

Corrigé :

Par définition du nombre dérivé à droite :

$$f_n'(0^+) = \lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x-x^n\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+}(1-x^{n-1}\ln x)$$

On sait que pour tout $n \geq 2$:

$$\lim_{x\to0^+} x^{n-1}\ln x = 0$$

(Limite usuelle des fonctions puissances-logarithmes)

Par conséquent :

$$f_n'(0^+) = 1-0 = 1$$

La fonction f_n est donc dérivable à droite en 0 et son nombre dérivé vaut 1.

d) **Montrer que f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x$**

Corrigé :

Dérivabilité sur $]0,+\infty[$: La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables :

$x \mapsto x$ est dérivable

$x \mapsto x^n\ln x$ est dérivable (produit de x^n et $\ln x$ dérivables)

Dérivabilité en 0^+ : Nous avons déjà montré que f_n est dérivable à droite en 0 avec $f_n'(0^+) = 1$.

Calcul de la dérivée : Pour $x > 0$:

$$(x)' = 1$$

$$(x^n\ln x)' = nx^{n-1}\ln x + x^n\cdot\frac{1}{x} = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1}$$

Donc :

$$f_n'(x) = 1-(nx^{n-1}\ln x + x^{n-1}) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x$$

e) **Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$**
Corrigé :

Sur l'intervalle $[0,1]$:
Pour $x \in [0,1]$:

Comme $x \in [0,1]$, on a $x^{n-1} \in [0,1]$ (car $n \geq 2$)
$\ln x \leq 0$ donc $1 + n\ln x \leq 1$
Par conséquent $x^{n-1}(1 + n\ln x) \leq x^{n-1} \leq 1$
On en déduit $f_n'(x) = 1 - x^{n-1}(1 + n\ln x) \geq 1 - x^{n-1} \geq 0$

De plus, $f_n'(x) = 0$ seulement si :
$x^{n-1} = 1$ (c'est-à-dire $x = 1$) **et**
$1 + n\ln x = 1$ (c'est-à-dire $\ln x = 0$ donc $x = 1$)
Ainsi $f_n'(x) > 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f_n'(1) = 0$.
Sur l'intervalle $[1,+\infty[$:
Pour $x \in [1,+\infty[$:

$\ln x \geq 0$ donc $1 + n\ln x \geq 1$
$x^{n-1} \geq 1$ (car $x \geq 1$ et $n \geq 2$)
Ainsi $x^{n-1}(1 + n\ln x) \geq 1$
Donc $f_n'(x) = 1 - x^{n-1}(1 + n\ln x) \leq 0$

De plus, $f_n'(x) = 0$ seulement si :
$x = 1$ **et** $\ln x = 0$ (donc $x = 1$)
Ainsi $f_n'(x) < 0$ pour $x \in]1,+\infty[$ et $f_n'(1) = 0$.
Conclusion :

f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ car $f_n'(x) \geq 0$
f_n est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ car $f_n'(x) \leq 0$

2)

a) **Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$**
Corrigé :
On a :
$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = (x - x^n \ln x) - (x - x^{n+1}\ln x) = x^n(1-x)\ln x$$

Cas $x = 0$:
$$f_n(0) - f_{n+1}(0) = 0 - 0 = 0$$

Cas $x = 1$:
$$f_n(1) - f_{n+1}(1) = (1 - 1^n \ln 1) - (1 - 1^{n+1}\ln 1) = 0$$

Cas $x \in]0,1[$:
i) $x^n > 0$ (strictement positif)
ii) $1 - x > 0$ (car $x < 1$)
iii) $\ln x < 0$ (car $0 < x < 1$)

Donc $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n(1-x)\ln x < 0$

Cas $x \in]1, +\infty[$:

i) $x^n > 0$

ii) $1 - x < 0$ (car $x > 1$)

iii) $\ln x > 0$ (car $x > 1$)

Donc $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n(1-x)\ln x > 0$

Conclusion : Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $f_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$ Alors $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 2$.

b) **En déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})**

Corrigé :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \Rightarrow (C_{n+1}) \text{ est en dessous de } (C_n)}$$

3)

a) **Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique $\alpha_n \in [1, 2[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$**

Corrigé :

i) $f_n(1) = 1 > 0$

ii) $f_n(2) = 2 - 2^n \ln 2 \approx 2 - 2^n \times 0.693 < 0$ pour $n \geq 2$

iii) f_n continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

$$\boxed{\exists!\ \alpha_n \in]1, 2[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0}$$

b) **Vérifier que $\forall n \geq 2$, $\alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$**

Corrigé :

Par définition de α_{n+1}, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$$

ce qui s'écrit explicitement :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}^{n+1} \ln \alpha_{n+1} = 0$$

Pour $\alpha_{n+1} \neq 0$ (ce qui est vrai car $\alpha_{n+1} \in]1, 2[$), on peut diviser par α_{n+1} :

$$1 = \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1}$$

Conclusion :

$$\alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$$

c) **En déduire que $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$**

Corrigé :

Par définition de f_n, on a :

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1}$$

D'après la question précédente, nous avons établi que :

$$\alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$$

En remplaçant dans l'expression de $f_n(\alpha_{n+1})$:

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - (\alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$$

d) **Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante**
Corrigé :
On a :

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_{n+1}) &= \alpha_{n+1} - 1 \\ &\leq 1 - 1 = 0 \quad \text{car } \alpha_{n+1} \in]1,2[\\ &= f_n(\alpha_n) \end{aligned}$$

Comme f_n est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et que :

$$f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$$

on en déduit que :

$$\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$$

Conclusion : La suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

e) **En déduire que $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente**
Corrigé :

$$\boxed{\text{Suite décroissante et minorée par 1, donc convergente}}$$

4)

a) **Montrer que $1 \leq \ell \leq 2$ où $\ell = \lim \alpha_n$**
Corrigé :
Pour tout $n \geq 2$, on sait que :

$$1 < \alpha_n < 2$$

La suite (α_n) étant convergente (car décroissante et minorée).
Par conservation des inégalités larges lors du passage à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \ell$$

$$1 \leq \ell \leq 2$$

b) **Montrer que $\forall n \geq 2,\ n - 1 = -\dfrac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n}$**
Corrigé :
D'après les questions précédentes, nous savons que α_n vérifie :

$$\alpha_n^{n-1} \ln \alpha_n = 1$$

Donc, prenons le logarithme népérien des deux membres :

$$\ln\left(\alpha_n^{n-1} \ln \alpha_n\right) = \ln(1)$$

$$\ln\left(\alpha_n^{n-1}\right) + \ln(\ln \alpha_n) = 0$$

$$(n-1)\ln \alpha_n + \ln(\ln \alpha_n) = 0$$

Alors :

$$(n-1)\ln \alpha_n = -\ln(\ln \alpha_n)$$

$$n - 1 = -\frac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n}$$

Conclusion :

$$\boxed{n - 1 = -\frac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n}}$$

c) **On suppose $\ell > 1$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n}$**

Corrigé :

Par hypothèse, $\ell = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n > 1$.
Les fonctions ln et $\ln\circ\ln$ sont continues sur $]1, +\infty[$.
Par composition de limites et continuité :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \alpha_n = \ln \ell \quad (\text{car } \ell > 1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln \alpha_n) = \ln(\ln \ell) \quad (\text{car } \ln \ell > 0)$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n} = \frac{\ln(\ln \ell)}{\ln \ell}$$

d) **En déduire la valeur de ℓ**

Corrigé :
Nous avons établi que pour tout $n \geq 2$:

$$n - 1 = -\frac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n}$$

et sous l'hypothèse $\ell > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln \alpha_n)}{\ln \alpha_n} = \frac{\ln(\ln \ell)}{\ln \ell}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$:

$$+\infty = -\frac{\ln(\ln \ell)}{\ln \ell}$$

Ce qui est impossible car le membre de droite est fini (pour $\ell > 1$).
Contradiction : L'hypothèse $\ell > 1$ conduit donc à une contradiction. On en déduit que :

$$\ell = 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\ell = 1}$$

Exercice 2 : (3.5 points)

1)

a) **Calculer l'intégrale :**

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Corrigé :
On a :

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan(1) - \arctan(0)\\ &= \frac{\pi}{4} - 0\\ &= \boxed{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

b) **Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :**

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé :

Réécrivons u_n sous forme de somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2)

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \leq 1$$

Corrigé :

Sur $[0,1]$, on a :

$1+x^2 \geq 1$ donc $(1+x^2)^2 \geq 1$

Ainsi $\frac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$

En intégrant :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx = \boxed{1}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \leq 1}$$

3)

a) **Montrer que :**

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq e^x - 1 \leq ex$$

Corrigé :

On a pour tout $x \in [0,1]$:

$$x \geq 0$$

$$e^x \geq e^0 = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{e^x - 1 \geq 0}$$

Et considérons la fonction $g(x) = ex - (e^x - 1)$ sur $[0,1]$:

i) $g(0) = 0 - (1 - 1) = 0$

ii) $g'(x) = e - e^x \geq 0$ car $e^x \leq e$ sur $[0,1]$

Ainsi g est croissante avec $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ sur $[0,1]$, ce qui donne :

$$\boxed{e^x - 1 \leq ex}$$

$$\boxed{0 \leq e^x - 1 \leq ex}$$

b) **En déduire que :**

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$$

Corrigé :

Posons $h(x) = e^x - 1 - x$.

i) $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$ sur $[0,1]$ (car $e^x \geq 1$),

ii) $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$.

$$\boxed{e^x - 1 - x \geq 0}$$

Par intégration de $e^t \leq 1 + e.t$ entre 0 et x :

$$\int_0^x e^t\,dt \leq \int_0^x (1 + et)\,dt \quad \Rightarrow \quad e^x - 1 \leq x + \frac{e}{2}x^2$$

Alors :

$$\boxed{0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2}$$

4)

a) **Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :**

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$$

Montrer que :

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)^2$$

Corrigé :

Nous avons :

$$w_n - u_n = \sum_{k=1}^{n} (e^{y_k} - 1) - \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} (e^{y_k} - 1 - y_k)$$

où $y_k = \dfrac{n}{n^2 + k^2}$.

D'après la question 3b, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$$

avec $y_k \in [0,1]$:

$$y_k = \frac{n}{n^2+k^2} \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{pour } n \geq 1$$

En appliquant l'inégalité de la question 3b à chaque y_k :

$$0 \leq e^{y_k} - 1 - y_k \leq \frac{e}{2}y_k^2$$

En sommant pour k de 1 à n :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (e^{y_k} - 1 - y_k) \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Ce qui donne :

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$$

$$\boxed{0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2}$$

b) **Montrer que la fonction :**

$$x \mapsto (1+x^2)^{-2}$$

est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Corrigé :

Posons $f(x) = (1+x^2)^{-2}$. On a :

$$f'(x) = -2(1+x^2)^{-3} \cdot 2x = -4x(1+x^2)^{-3}$$

Pour $x \in [0,1]$:

$x \geq 0$

$(1+x^2)^{-3} > 0$

Donc $f'(x) = -4x(1+x^2)^{-3} \leq 0$ avec égalité seulement en $x = 0$.
Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto (1+x^2)^{-2} \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$

c) **En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a :**

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2}\,dx.$$

Corrigé :

D'après la question précédente, f est décroissante sur $[0,1]$. Donc pour $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

En particulier :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x)$$

Donc :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$$

Comme $f\left(\frac{k}{n}\right)$ est constant :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot [x]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left[\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right] \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2}dx}$$

5)

a) **Montrer que :**

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$$

Corrigé :

Nous avons :

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$$

Considérons le terme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$$

Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\frac{n}{n^2+k^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

En sommant :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{1}{n^2}\times n = \frac{1}{n}$$

$$S_n \leq \frac{1}{n}$$

En remplaçons dans l'inégalité initiale :

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \times \frac{1}{n}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}}$$

b) **En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.**

Corrigé :

Nous savons que :

i) u_n converge vers $\frac{\pi}{4}$ (d'après la question 1b)

ii) $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$ avec $\frac{e}{2n} \to 0$

Et d'apres le théorème des gendarmes à $w_n - u_n$:

$$\lim_{n\to\infty} (w_n - u_n) = 0$$

Comme $w_n = u_n + (w_n - u_n)$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} (w_n - u_n) = \frac{\pi}{4} + 0$$

$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ converge vers } \frac{\pi}{4}}$

Exercice 3 : (3.5 points)

Partie I

1)

a) **Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (im)^2$**

Corrigé :

$$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$$

Calculons le discriminant :

$\Delta = [-(2+i)m]^2 - 4\times 1\times m^2(1+i) = m^2(4+4i-1) - 4m^2(1+i) = m^2(3+4i-4-4i) = m^2(-1)$

$$\boxed{\Delta = (im)^2}$$

b) **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)**

Corrigé :

Les solutions sont :

$$z = \frac{(2+i)m \pm \sqrt{-\Delta}}{2}$$
$$z = \frac{(2+i)m \pm im}{2}$$

Donc :

$$z_1 = \frac{(2+i+i)m}{2} = \frac{(2+2i)m}{2} = \boxed{m(1+i)}$$
$$z_2 = \frac{(2+i-i)m}{2} = \frac{2m}{2} = \boxed{m}$$

2)

Mettre $z_1 z_2$ sous forme exponentielle pour $m = re^{i\theta}$
Corrigé :

$$z_1 z_2 = m \times m(1+i) = m^2(1+i) = r^2 e^{i2\theta}(1+i)$$

Or $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc :

$$\boxed{z_1 z_2 = r^2\sqrt{2}e^{i(2\theta+\pi/4)}}$$

Partie II

1) Calculer z_3 et z_4
Corrigé :

Rotation :

$$z_3 = z_2 + e^{-i\pi/2}(0 - z_2) = m(1+i) - i(-m(1+i)) =$$

$$z_3 = \boxed{m(1+i) + im(1+i) = m(1+2i-1) = 2im}$$

Homothétie :

$$z_4 = kz_1 = \boxed{km}$$

2) Donner la forme algébrique de :

$$\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Corrigé :

$$\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{km - m(1+i)}{km - m} \times \frac{2im - m}{2im - m(1+i)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m(k-1-i)}{m(k-1)} \times \frac{m(2i-1)}{m(i-1)} \\
&= \frac{k-1-i}{k-1} \times \frac{2i-1}{i-1} \\
&= \frac{(k-1-i)(2i-1)}{(k-1)(i-1)} \\
&= \frac{(k-1)(2i-1) - i(2i-1)}{(k-1)(i-1)} \\
&= \frac{2i(k-1) - (k-1) - 2i^2 + i}{(k-1)(i-1)} \\
&= \frac{2i(k-1) - k + 1 + 2 + i}{(k-1)(i-1)} \\
&= \frac{(3-k) + i(2k-1)}{(1-k) + i(k-1)} \\
&= \boxed{\frac{3-k+i(2k-1)}{1-k+i(k-1)}}
\end{aligned}$$

3) En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$.

Corrigé : Les points sont cocycliques si et seulement si :

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in \mathbb{R}$$

c'est a dite :

$$\frac{3 - k + i(2k-1)}{1 - k + i(k-1)} \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{3 - k + i(2k-1)}{1 - k + i(k-1)} &= \frac{(3 - k + i(2k-1))(1 - k - i(k-1))}{(1 - k + i(k-1))(1 - k - i(k-1))} \\
&= \frac{(3-k)(1-k) + (3-k)(-i)(k-1) + i(2k-1)(1-k) + i(2k-1)(-i)(k-1)}{(1-k)^2 + (k-1)^2} \\
&= \frac{(3k^2 - 7k + 4) + i(-k^2 - k + 2)}{2(k-1)^2} \\
&= \frac{(3k^2 - 7k + 4) + i(k+2)(-k+1)}{2(k-1)^2}
\end{aligned}$$

Donc pour que l'expression soit réelle, sa partie imaginaire doit être nulle. Cela impose :

$$k = 1 \quad \text{ou} \quad k = -2$$

Or $k \neq 1$ par hypothèse, donc la seule solution est :

$$\boxed{k = -2}$$

Donc les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$

Exercice 4 : (3.5 points)

Partie I

1-a) **Vérifier que : $1 * 2i = 2$**

Corrigé :

Par définition de la loi $*$ avec $x = 1$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 2$:

$$\begin{aligned}
1 * 2i &= (1 \times 2 + 0^5 \times 0) + i(0 \times 2) \\
&= (2 + 0) + i(0) \\
&= \boxed{2}
\end{aligned}$$

b) **Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative**

Corrigé :

On a :

$$\begin{aligned}
(1+i) * 2i &= (1 \times 2 + 1^5 \times 0) + i(1 \times 2) = 2 + 2i \\
2i * (1+i) &= (0 \times 1 + 2^5 \times 1) + i(2 \times 1) = 32 + 2i
\end{aligned}$$

Comme $2 + 2i \neq 32 + 2i$, la loi n'est pas commutative.

2) **Montrer que la loi $*$ est associative**

Corrigé :

Pour $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned}(z_1 * z_2) * z_3 &= [(x_1y_2 + y_1^5x_2) + iy_1y_2] * z_3 \\ &= (x_1y_2y_3 + y_1^5x_2y_3 + (y_1y_2)^5x_3) + iy_1y_2y_3 \\ z_1 * (z_2 * z_3) &= z_1 * [(x_2y_3 + y_2^5x_3) + iy_2y_3] \\ &= (x_1y_2y_3 + y_1^5x_2y_3 + y_1^5y_2^5x_3) + iy_1y_2y_3\end{aligned}$$

Donc la loi $*$ est associative.

3-a) **Vérifier que : $1 * (1 + 2i) = 2$**

Corrigé :

Avec $x = 1$, $y = 0$, $x' = 1$, $y' = 2$:

$$\begin{aligned}1 * (1 + 2i) &= (1 \times 2 + 0^5 \times 1) + i(0 \times 2) \\ &= (2 + 0) + i(0) \\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

b) **En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe**

Corrigé :

Si $(\mathbb{C}, *)$ était un groupe, l'équation $1 * X = 2$ aurait une unique solution. Or :

i) $X = 1 + 2i$ est solution (d'après 3a)

ii) $X = 2i$ est aussi solution (d'après 1a)

Il y a donc plusieurs solutions, ce qui contredit la propriété d'unicité dans un groupe.

4-a) **Montrer que $E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*\}$ est stable**

Corrigé :

Pour $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i \in E$:

$$\begin{aligned}z_1 * z_2 &= (x_1y_2 + y_1^5x_2) + i(y_1y_2) \\ &\text{avec } y_1y_2 \neq 0 \text{ car } y_1 \text{ et } y_2 \neq 0\end{aligned}$$

Donc $z_1 * z_2 \in E$.

Alors $E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*\}$ est stable

b) **Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif**

Corrigé :

i) **Associativité** : Héritée de $(\mathbb{C}, *)$

ii) **Élément neutre** : $e = 0 + i$ car :

$$(x + yi) * (0 + i) = (x \cdot 1 + y^5 \cdot 0) + i(y \cdot 1) = x + yi$$

iii) **Inverse** : Pour $z = x + yi$, cherchons $z' = a + bi$ tel que :

$$(x + yi) * (a + bi) = (xb + y^5a) + i(yb) = 0 + i$$

On résout $yb = 1$ et $xb + y^5a = 0$:

$$b = \frac{1}{y}, \quad a = -\frac{x}{y^6}$$

iv) **Non commutativité** : Comme pour $(\mathbb{C}, *)$

Alors $(E, *)$ est bien un groupe non commutatif.

Partie II

1. **Montrer que $F = \{yi \mid y \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de $(E, *)$**

   Corrigé :

   — **Stabilité** : Pour $yi, y'i \in F$:
   $$yi * y'i = (0 + y^5 \cdot 0) + i(yy') = yy'i \in F$$
   — **Élément neutre** : $i \in F$ (cas $y = 1$)
   — **Inverse** : Pour $yi \in F$, cherchons $y'i \in F$ tel que :
   $$yi * y'i = i \quad \text{(élément neutre)}$$
   Par définition de la loi $*$:
   $$yi * y'i = (0 \cdot y' + y^5 \cdot 0) + i(y \cdot y') = iyy'$$
   On veut que ceci soit égal à l'élément neutre i :
   $$iyy' = i \implies yy' = 1 \implies y' = \frac{1}{y}$$
   Ainsi, l'inverse de yi est $\boxed{\frac{1}{y}i \in F}$ (car $y \neq 0$).

   Alors F est un sous-groupe de $(E, *)$.

2. **Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = x + i$**

   a) **Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$**

   Corrigé :
   Par définition, $G = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \boxed{\varphi(\mathbb{R})}$.

   b) **Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$**

   Corrigé :
   Pour $x, x' \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} \varphi(x + x') &= (x + x') + i \\ \varphi(x) * \varphi(x') &= (x + i) * (x' + i) = (x \cdot 1 + 1^5 \cdot x') + i(1 \cdot 1) \\ &= (x + x') + i = \varphi(x + x') \end{aligned}$$
   Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$.

   c) **En déduire que $(G, *)$ est commutatif**

   Corrigé :
   Comme $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif et φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$, alors $(G, *)$ est commutatif.

Exercice 5 : (3 points)

1. **En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, ..., 22\}$ tel que :**
   $$10u \equiv 1\,[23]$$

   Corrigé :

On a :

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \times 10 + 3 \\ 10 &= 3 \times 3 + 1 \\ 3 &= 3 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \times 3 \\ &= 10 - 3 \times (23 - 2 \times 10) \\ &= 7 \times 10 - 3 \times 23 \end{aligned}$$

Alors :

$$\boxed{u = 7}$$

2. **Soient m un entier naturel et q et r, respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10**

   (a) **Montrer que : $m \equiv 10(q + ur)\,[23]$**

   Corrigé :

$$\begin{aligned} m &= 10q + r \\ &\equiv 10q + r \times 1\,[23] \\ &\equiv 10q + r \times (10u)\,[23] \quad (\text{car } 10u \equiv 1) \\ &\equiv 10(q + ur)\,[23] \end{aligned}$$

$$\boxed{m \equiv 10(q + ur)\,[23]}$$

   (b) **Montrer que : 23 divise $m \iff$ 23 divise $(q + ur)$**

   Corrigé : D'après la question précédente :

$$m \equiv 10(q + ur)\,[23]$$

   Comme 10 et 23 sont premiers entre alors d'apres le théorème de Gauss :

$$\boxed{23 \text{ divise } m \iff 23 \text{ divise } (q + ur)}$$

3. **On considère dans $\mathbb{N}$ le système (S) :**

$$\begin{cases} x \equiv 1\,[23] \\ x \equiv 2\,[10] \end{cases}$$

   (a) **Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que :**

$$x = 10q + 2 \,\text{et}\, 23 \,\text{divise}\, (q + 7)$$

   Corrigé :

   De la 2ème congruence : $x = 10q + 2$
   De la 1ère congruence : $10q + 2 \equiv 1\,[23]$
   Donc $10q \equiv -1\,[23]$

Comme $u = 7$ est l'inverse de 10 modulo 23 :

$$q \equiv -7\,[23] \implies q + 7 \equiv 0\,[23]$$

$$\boxed{\exists q \in \mathbb{N}, x = 10q + 2 \text{ et } 23 \text{ divise } (q+7)}$$

(b) **Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S)**

Corrigé :

D'après (a), $q = 23k - 7$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

Donc $x = 10(23k - 7) + 2 = 230k - 68$

$$\boxed{x = 230k - 68, k \geq 1}$$